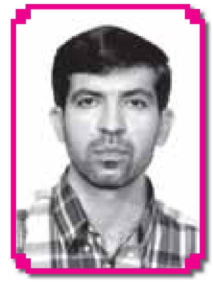
دکتر محرم نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



پای تخته

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.
مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.
نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد.
منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۱۸۱. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $n!\geq 2^{n-1}$.

۱۸۲. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $2^{2^n}-1$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۸۳. r عددی حقیقی است، به‌طوری که $r+\frac{1}{r}$ عددی صحیح است.
ثابت کنید $r^n+\frac{1}{r^n}$ به ازای هر $n\in N$ عددی صحیح است.

۱۸۴. n خط راست، صفحه را به حداکثر چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

۱۸۵. ثابت کنید در بسط عبارت $(1+x+x^2)^n$، حداقل یکی از ضرایب زوج است.

۱۸۶. با فرض $a,b,c>0$ ثابت کنید:

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\geq 9a^2b^2c^2$$

۱۸۷. با فرض $a,b,c\geq 0$ ثابت کنید:

$$\sqrt{3(a+b+c)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

۱۸۸. a، b و c سه عدد طبیعی هستند، به‌طوری‌که $a^2+b^2=c^2$. ثابت کنید ab مضرب ۳ است.

۱۸۹. ثابت کنید $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ $(n\geq 2)$ هیچ‌وقت صحیح نیست.

۱۹۰. اگر p و p^2+2 هر دو اول باشند، ثابت کنید p^3+2 نیز اول است.

بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱۵۱. اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+b+1=0$ طبیعی باشند، ثابت کنید a^2+b^2 عددی مرکب است.

اگر r و s ریشه‌های معادله باشند، داریم $r+s=-a$ و $rs=b+1$. در نتیجه:

$$a^2+b^2=(r+s)^2+(rs-1)^2=(r^2+1)(s^2+1).$$

۱۵۲. همهٔ جواب‌های طبیعی معادلهٔ زیر را پیدا کنید.

$$m^2-3m+1=n^2+n-1$$

می‌توان معادله را به فرم $(n+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}=(m-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}$ تبدیل

کرد. در نتیجه: $(m+n-1)(m-n-2)=0$. چون m و n طبیعی هستند، پس $m+n-1>0$ و در نتیجه $m-n-2=0$. بنابراین، $(m,n)=(a+2,a)$ که در آن $a\in N$.

۱۵۳. ضرایب تابع $p(x)=ax^2+bx+c$ اعدادی حقیقی هستند و مقادیر $p(0)$، $p(1)$ و $p(-1)$ صحیح‌اند. ثابت کنید $p(n)$ به ازای همهٔ مقادیر صحیح n صحیح است.

چون $p(-1)=a-b+c$، $p(0)=c$ و $p(1)=a+b+c$ صحیح هستند، در نتیجه اعداد $2a$، $2b$ و c صحیح هستند. برای هر عدد زوج $n=2m$ داریم:

$$p(n)=4am^2+2bm+c=2m^2\times 2a+m\times 2b+c\in Z.$$

و اگر $n=2m+1$ آنگاه

$$p(n)=a(2m+1)^2+b(2m+1)+c$$
$$=(2m^2+2m)(2a)+m(2b)+(a+b+c)$$

که نشان می‌دهد در این حالت نیز $p(n)$ صحیح است.

۱۵۴. $p(x)$ یک چندجمله‌ای است، به‌طوری که: $p(x^2+1)=x^4+4x^2$. مطلوب است: $p(x^2-1)$.

با توجه به فرض مسئله $p(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم است. با فرض $p(x)=x^2+bx+c$ داریم: $(x^2+1)^2+b(x^2+1)+c=x^4+4x^2$. در نتیجه، با متحد قرار دادن دو طرف به روابط $2+b=4$ و $1+b+c=0$ می‌رسیم. در نتیجه: $b=2$ و $c=-3$ و $p(x)=x^2+2x-3$ و در نتیجه: $p(x^2-1)=x^4-4$.

۱۵۵. a، b، c و d اعدادی طبیعی هستند، به‌طوری که: $a+b=c+d$ و $a^3+b^3=c^3+d^3$. ثابت کنید دو تا از این اعداد با هم برابر هستند.

داریم $(a+b)(a^2-ab+b^2)=(c+d)(c^2-cd+d^2)$. در نتیجه، چون $a+b=c+d\neq 0$ پس $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$. از طرف دیگر، $(a+b)^2=(c+d)^2$. از دو رابطهٔ آخر نتیجه می‌شود: $ab=cd$. در نتیجه، $\{a,b\}$ و $\{c,d\}$ ریشه‌های معادلهٔ $Z^2-(a+b)Z+ab=0$ خواهند بود. در نتیجه: $\{a,b\}=\{c,d\}$.

۱۵۶. با فرض $n>r>0$ ثابت کنید:

$$\binom{n}{r}^2>\binom{n}{r+1}\binom{n}{r-1}$$

پس از ساده کردن جملات مشترک در دو طرف نامساوی، به نامساوی زیر می‌رسیم: $\frac{1}{n-r}>\frac{1}{n-r+1}$ که برقرار است.

۱۵۷. با فرض $a<b$ ثابت کنید:

$$\binom{a}{2}+\binom{b}{2}\geq\binom{a+1}{2}+\binom{b-1}{2}$$

پس از ساده کردن جملات مشترک به نامساوی $b\geq a+1$ می‌رسیم.

۱۵۸. سیزده نقطه با مختصات صحیح در صفحه مفروض‌اند. ثابت کنید چهار نقطه در میان آن‌ها وجود دارند که مرکز ثقل این چهار نقطه مختصاتی صحیح دارد (مختصات مرکز ثقل k نقطه برابر است با میانگین مختصات آن k نقطه).

چهار حالت برای مؤلفه‌های یک نقطه در تقسیم بر ۲ وجود دارد: $(1,1)$-$(0,1)$-$(1,0)$ و $(0,0)$. در نتیجه، در میان هر پنج نقطه، حداقل ۲ نقطه از لحاظ زوجیت مؤلفه‌ها یکسان هستند. بنابراین، با تکرار این ۵تایی‌ها، به ۵ زوج از نقاط می‌رسیم که یکسان هستند. برای مجموع مؤلفه‌های هر دو نقطه چهار حالت وجود دارد: $(0,2)$، $(2,2)$، $(0,0)$ و $(2,0)$. در نتیجه، در میان این پنج زوج نقطه، دو زوج نقطه وجود دارند که مجموع مؤلفه‌های آن‌ها یکسان است. در نتیجه، مجموع مؤلفه‌های این ۴ نقطه مضرب ۴ خواهد بود که نشان می‌دهد مرکز ثقل آن‌ها نقطه‌ای با مختصات صحیح است.

۱۵۹. اعداد ۱ تا n روی تختهٔ سیاه نوشته شده‌اند. می‌خواهیم برای این اعداد علامت مثبت یا منفی بگذاریم، به‌طوری که مجموع اعداد حاصل صفر شود. به ازای چه مقادیری از n این کار امکان‌پذیر است؟

این کار در صورتی امکان‌پذیر است که مجموع اعداد ۱ تا n یعنی $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج باشد. پس $n(n+1)$ باید مضرب ۴ باشد. در نتیجه، n باید به فرم $4k$ یا $4k-1$ باشد. در حالتی که $n=4k$، اعداد را به دو دستهٔ $A=\{1,2,...,k,3k,3k+1,3k+2,...,4k\}$ و $B=\{k+1,k+2,...,3k\}$ افراز می‌کنیم و در حالتی که $n=4k-1$، عدد $4k$ را از مجموعهٔ A حذف و از مجموعهٔ B، $2k$ را به A اضافه می‌کنیم.

۱۶۰. ثابت کنید تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد مانند n، فرد است، اگر و تنها اگر n مربع کامل باشد.

اگر n را به عامل‌های اول تجزیه کنیم و به‌صورت $n=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}...P_k^{\alpha_k}$ بنویسیم، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی n برابر است با $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$. این تعداد فرد است، اگر و تنها اگر α_iها همگی زوج باشند که در این حالت n مربع کامل خواهد بود.